Quadratisch integrierbare Hochpassfunktionen

Von ANTONIO STEINER in Solothurn (Schweiz), z. Zt. in Teheran (Iran)

§ 1. Ein Eindeutigkeitssatz. Eine analytische Funktion $f(z)$ in der oberen Halbebene gehört der Hardy-Klasse an, wenn die L_2-Normen genommen längs den Parallelen zur x-Achse in y gleichmäßig beschränkt sind. Eine solche besitzt f. ü. radiale Randwerte $f(x) \in L_2$. Diese Randfunktionen bilden die Klasse α. Nach dem Satz von Paley und Wiener (vgl. z. B. [5]) gehört eine komplexwertige L_2-Funktion dann und nur dann zu α, wenn ihre Fouriertransformierte auf der positiven Achse verschwindet. Entsprechend definieren wir die Klasse β: Sie besteht aus den Randfunktionen analytischer Funktionen der Hardy-Klasse in der unteren Halbebene. Eine L_2-Funktion ist genau dann eine β-Funktion, wenn ihre Fouriertransformierte auf der negativen Achse verschwindet.

Unter einer Hochpaßfunktion $f \in H_2(a)$ verstehen wir die Fouriertransformierte einer komplexwertigen quadratisch integrierbaren Funktion g, welche auf dem Intervall $(-a, a)$ verschwindet, d. h.

$$(1) \qquad f = Fg = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\lambda t} g, \quad g = 0 \quad \text{auf} \quad (-a, a)$$

(vgl. [1]). Eine Hochpaßfunktion ist durch ihre Werte etwa auf der positiven Achse in ganzer Erstreckung eindeutig bestimmt. Es gilt nämlich:

Satz 1. *Verschwindet eine Hochpaßfunktion f auf $(0, \infty)$, so ist sie identisch Null.*

Beweis. Nach dem Satz von Paley und Wiener ist $g \in \alpha$. Eine α-Funktion ist aber durch ihre Werte auf einem beliebig kleinen Intervall eindeutig bestimmt: verschwindet sie auf einem Intervall, dann ist sie identisch Null (vgl. [3], S. 91). Aus $g \in \alpha$ und $g=0$ auf $(-a, a)$ folgt also, dass g und damit f identisch Null ist.

Neben $(0, \infty)$ sind auch (c, ∞) und $(-\infty, c)$ Bestimmtheitsintervalle für Hochpaßfunktionen, da mit $f(x) \in H_2(a)$ auch $f(x+c)$ und $f(-x)$ dieser Klasse angehören.

§ 2. **Die einseitig unendliche Fouriertransformation.** Wir benutzen die in $L_2(0, \infty)$ erklärten Operatoren (vgl. [2], S. 10)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt\, e^{ixt}, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt\, e^{-ixt};$$

man hat

$$A^2 + B^2 = 0, \quad AB + BA = E, \tag{2}$$

wobei E den identischen Operator bezeichnet.

Hilfssatz. *Gilt mit einem Paar $p, q \in L_2(0, \infty)$ die Beziehung $Ap = Bq$, so existiert ein $h \in L_2(0, \infty)$ mit $p = Ah$, $q = -Bh$.*

Man bemerkt natürlich sofort, daß die Umkehrung richtig ist, da nach (2)

$$Ap = A^2 h = -B^2 h = Bq.$$

Zum Beweis des Hilfssatzes setze man

$$h = Bp - Aq$$

und berechne nach (2)

$$Ah = ABp - A^2 q = p - BAp + B^2 q = p - B(Ap - Bq) = p,$$

sowie

$$-Bh = -B^2 p + BAq = A^2 p + q - ABq = q + A(Ap - Bq) = q.$$

§ 3. **Reellwertige Hochpaßfunktionen.** Es sollen $r = p + ip_1$ bzw. $s = -i(q + iq_1)$ den geraden bzw. ungeraden Teil der in (1) eingehenden Funktion g bezeichnen. Diese Aufspaltung liefert für die zugeordnete Hochpaßfunktion den Ausdruck

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt\, e^{ixt}(r+s) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt\, e^{-ixt}(r-s), \qquad r = s = 0 \quad \text{auf} \quad (0, a). \tag{3}$$

Wie leicht ersichtlich, gehören Real- und Imaginärteil einer Funktion aus $H_2(a)$ zur selben Klasse. Nach Satz 1 ist also die Hochpaßfunktion f reellwertig dann und nur dann, wenn ihr Imaginärteil auf $(0, \infty)$ verschwindet, also nach (3), wenn die Bedingung

$$A(p_1 - iq_1) = B(-p_1 - iq_1) \tag{4}$$

erfüllt ist.

Gleichbedeutend mit (4) ist das Verschwinden der Funktion $p_1 - iq_1$: denn nach dem Hilfssatz von § 2 ist sie von der Form Ah, d. h. stimmt auf $(0, \infty)$ mit den Werten einer α-Funktion überein, welche auf $(0, a)$ und daher identisch Null ist.

Setzt man aber in (3) $p_1=q_1=0$, $g=r+s$, $r=p$, $s=-iq$, und bezeichnet man die Bildung der konjugiert komplexen Zahl mit einem Querstrich, so gelangt man zum

Satz 2. *Der allgemeine Ausdruck für eine reellwertige Hochpaßfunktion ist*

$$(5) \qquad f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dt\, e^{ixt}g+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dt\, e^{-ixt}\bar{g}, \quad \textit{mit } g=0 \textit{ auf } (0,a).$$

§ 4. Abschnitte von Hochpaßfunktionen. Die Restriktion einer auf $(-\infty, \infty)$ gegebenen Funktion $f(x)$ auf $(0, \infty)$ heiße ihr *rechter* Abschnitt f. Unter ihrem *linken* Abschnitt verstehen wir die Funktion $f^-=f(-x)$, $x>0$.

Wir benutzen in $L_2(0, \infty)$ neben A und B auch die Kosinus- und Sinustransformation

$$C=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dt\cos xt, \quad S=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dt\sin xt;$$

für sie gilt

$$(6) \qquad C^2=S^2=E, \quad A=\frac{1}{2}(C+iS), \quad B=\frac{1}{2}(C-iS).$$

Ferner definieren wir die beiden Abschneideoperatoren $\hat{}$ bzw. $\check{}$: für h auf $(0, \infty)$ ist

$$\hat{h}=\begin{cases} h & \text{auf } (0,a) \\ 0 & \text{auf } (a,\infty) \end{cases}, \quad \check{h}=\begin{cases} 0 & \text{auf } (0,a) \\ h & \text{auf } (a,\infty). \end{cases}$$

Satz 3. *Die Abschnitte f und f^- einer reellwertigen Hochpaßfunktion lassen sich eindeutig durch $g=\check{g}=\check{r}+\check{s}$, $\check{r}=\check{p}$, $\check{s}=-i\check{q}$ darstellen als*

$$(7) \qquad f=C\check{p}+S\check{q}, \quad f^-=C\check{p}-S\check{q}.$$

Hierhnin bezeichnen $\check{p}$ und $\check{q}$ reellwertige Funktionen aus $L_2(0, \infty)$, *welche auf* $(0, a)$ *verschwinden.*

Beweis. Die Existenz der Darstellung (7) ist eine unmittelbare Folge aus (5) und (6). Die Eindeutigkeit ergibt sich folgendermaßen: Nach Satz 1 folgt etwa aus $f=C\check{p}+S\check{q}=0$, daß $f^-=C\check{p}-S\check{q}=0$ und damit $\check{p}=\check{q}=0$.

Korollar. *$\hat{C}f=0$ bzw. $\hat{S}f=0$ sind notwendig und hinreichend dafür, daß ein reellwertiges $f\in L_2(0, \infty)$ rechter Abschnitt einer geraden bzw. ungeraden Hochpaßfunktion sei, d. h.*

$$(8) \qquad \hat{C}f=0 \Leftrightarrow f=C\check{p}, \quad \hat{S}f=0 \Leftrightarrow f=S\check{q}.$$

§ 5. Tiefpaßfunktionen. Man definiert in analoger Weise eine Tiefpaßfunktion $f \in T_2(a)$ als Fouriertransformierte einer komplexwertigen quadratisch integrierbaren Funktion g, welche außerhalb $(-a, a)$ verschwindet:

(9) $$f = Fg = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{ixt} g, \quad g = 0 \text{ außerhalb } (-a, a).$$

Da f Restriktion der ganzen Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} dt\, e^{izt} g$$

auf die reelle Achse ist, stellt jetzt schon jedes *endliche* Intervall ein Bestimmtheitsintervall für Tiefpaßfunktionen dar. Die Aufspaltung $g=r+s$, $r=p+ip_1$, $s=-i(q+iq_1)$ der Funktion g in ihren geraden und ungeraden Teil läßt wieder erkennen, daß Real- und Imaginärteil einer Funktion aus $T_2(a)$ zur selben Klasse gehören.

Satz 4. *Die reellwertigen Tiefpaßfunktionen sind durch* $p_1=q_1=0, g=r+s, r=p,$ $s=-iq$ *charakterisiert und haben die Form*

(10) $$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} dt\, e^{ixt} \hat{g} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} dt\, e^{-ixt} \bar{\hat{g}}.$$

Satz 5. *Die Abschnitte eines reellwertigen Tiefpaßes haben die eindeutige Darstellung*

(11) $$f = C\hat{p} + S\hat{q}, \quad f^- = C\hat{p} - S\hat{q},$$

mit reellwertigen Funktionen $\hat{p}$ *und* $\hat{q}$ *aus* $L_2(0, \infty)$, *welche auf* (a, ∞) *verschwinden.*

Korollar. *Für reellwertige rechte Abschnitte gerader bzw. ungerader Tiefpaßfunktionen gilt*

(12) $$\check{C}f = 0 \Leftrightarrow f = C\hat{p}, \quad \check{S}f = 0 \Leftrightarrow f = S\hat{q}.$$

§ 6. Eine Integralgleichung. Wir leiten zuerst eine *notwendige* Bedingung dafür her, daß eine reellwertige Funktion $f \in L_2(0, \infty)$ rechter Abschnitt einer Hochpaßfunktion sei: $f \in H_2^+(a)$. Aus (7) $f = C\check{p} + S\check{q}$ folgt $Cf = \check{p} + CS\check{q}$, $\hat{C}f = \hat{C}S\check{q}$, $C\hat{C}f = C\hat{C}S\check{q} = C(CS\check{q} - \check{C}S\check{q})$, d. h.

(13) $$C\hat{C}f = C(-\check{C}S\check{q}) + S\check{q},$$

was bedeutet, daß mit f auch $C\hat{C}f$ rechter Abschnitt eines Hochpaßes ist. Äquivalent zu (13) ist die Aussage

(14) $$\hat{C}f = \hat{C}S\check{q}.$$

Die Auflösbarkeit dieser Integralgleichung bei gegebenem f nach $\check{q}$ ist notwendig für $f \in H_2^+(a)$. Sie ist auch *hinreichend* hierfür, da beim Erfülltsein von (14) $\check{p} = \check{C}f - \check{C}S\check{q} = Cf - CS\check{q}$ und daher

$$C\check{p} + S\check{q} = C(Cf - CS\check{q}) + S\check{q} = f.$$

Wir untersuchen jetzt die Integralgleichung[1])

$$\hat{g} = \hat{C}S\check{x}, \tag{15}$$

mit beliebig vorgegebener reellwertiger linker Seite $\hat{g} \in L_2(0, a)$ und gesuchter Funktion $\check{x} \in L_2(a, \infty)$. Zunächst beweisen wir die *Eindeutigkeit der Lösung:*

Nach der Bemerkung am Schluß von § 4 über die Eindeutigkeit der Darstellung (7) gilt

$$C\check{p} + S\check{q} = 0 \Leftrightarrow S\check{q} = C(-\check{p}) \Leftrightarrow CS\check{q} = -\check{p} \Leftrightarrow \hat{p}, \check{q} = 0,$$

d. h. $CS\check{q}$ muß einen nicht verschwindenden $\hat{}$-Anteil haben, soll $\check{q}$ nicht gleich Null sein:

$$CS\check{q} = -p \Leftrightarrow \hat{C}S\check{q} = 0 \Leftrightarrow \check{p}, \check{q} = 0.$$

Ein anderer Beweis dafür, daß $\hat{C}S\check{x} = 0 \Rightarrow \check{x} = 0$ ist der folgende:

Aus $\hat{C}S\check{x} = 0$ folgt nach (8), daß $S\check{x}$ rechter Abschnitt eines *geraden* Hochpaßes ist. Wegen $\hat{S} \cdot S\check{x} = 0$ ist aber $S\check{x}$ gleichzeitig rechter Abschnitt eines *ungeraden* Hochpaßes. Bezeichnet man die entsprechenden Urbildfunktionen bezüglich der Fouriertransformation mit g_1 und g_2, sowie die Klasse der Randfunktionen analytischer Funktionen der Hardy-Klasse in der unteren Halbebene mit β, so folgt durch Summen- und Differenzbildung, daß $g_1 - g_2 \in \alpha$ und $g_1 + g_2 \in \beta$, so daß $g_1 - g_2 = 0$ und $g_1 + g_2 = 0$, da beide Funktionen mit g_1 und g_2 auf $(-a, a)$ gleich Null sind. Daher ist $S\check{x} = 0$, d. h. $\check{x} = 0$.

Eine interessante Interpretation der Integralgleichung (15) und ihrer Auflösung ergibt sich aus den Identitäten

$$AS = \frac{1}{2}(C + iS)S = \frac{i}{2}E + \frac{1}{2}CS, \quad BS = \frac{1}{2}(C - iS)S = -\frac{i}{2}E + \frac{1}{2}CS.$$

Nach ihnen ist für alle $\check{x}$

$$\hat{C}S\check{x} = \hat{A} \cdot 2S\check{x} = \hat{B} \cdot 2S\check{x} \in \hat{\alpha} \cap \hat{\beta} = \hat{\gamma}.$$

Notwendig für die Lösbarkeit von (15) ist also die Zugehörigkeit ihrer linken Seite

[1]) Sie lautet ausgeschrieben

$$\hat{g} = \frac{1}{\pi} \int_a^\infty dt \frac{t}{t^2 - s^2} 2\check{x}(t).$$

Für eine direkte Auflösung vgl. [4] S. 28—30.

$\hat{g}$ zu $\hat{\alpha}=\alpha(0, a)$ und zu $\hat{\beta}=\beta(0, a)$, d. h. $\hat{g}$ muß auf $(0, a)$ mit einer α-Funktion, d. i. der Randfunktion einer analytischen Funktion der Hardy-Klasse in der oberen Halbebene, als auch mit den Werten einer β-Funktion, der Randfunktion einer analytischen Funktion der Hardy-Klasse in der unteren Halbebene übereinstimmen. Da nach dem Satz von Paley und Wiener mit $p, q\in L_2(0, \infty)$

$$g\in\alpha \Leftrightarrow g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dt\, e^{ixt}p, \qquad g\in\beta \Leftrightarrow g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dt\, e^{-ixt}q,$$

liegt $\hat{g}$ dann und nur dann in $\alpha(0, a)\cap\beta(0, a)$, wenn die Funktion $h=\hat{g}+F^2\hat{g}$ (beachte, daß F^2 eine Funktion $f(x)$ in ihr Spiegelbild $f(-x)$ überführt), welche einfach die Fortsetzung von $\hat{g}$ als *gerade* Funktion auf $(-a, 0)$ darstellt, auf $(-a, a)$ mit den Werten einer α-Funktion übereinstimmt:

$$h = \hat{g}+F^2\hat{g}\in\alpha(-a, a). \tag{16}$$

Das Erfülltsein der Bedingung (16) ist umgekehrt auch *hinreichend* für die Lösbarkeit von (15): mit

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dt\, e^{ixt}p \text{ in } (-a, a), \; h \text{ gerade in } (-a, a),$$

und $\hat{h}=\hat{g}=\hat{A}p$ wird $\hat{S}p=0$, und die $\check{}$-Funktion

$$\check{x} = \frac{1}{2}Sp$$

löst die Integralgleichung (15)

$$\hat{g} = \hat{A}p = \hat{A}2S\check{x} = \hat{C}S\check{x}.$$

Damit haben wir

Satz 6. *Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit von* (15) *ist das Erfülltsein von* (16).

Unter Beachtung von (14) ergibt sich daraus mit $\hat{g}=\hat{C}f$ als Korollar:

Satz 7. *Die reellwertige Funktion $f\in L_2(0, \infty)$ ist dann und nur dann rechter Abschnitt einer Hochpaßfunktion, wenn $\hat{C}f$, als gerade Funktion fortgesetzt, auf $(-a, a)$ mit den Werten einer α-Funktion übereinstimmt, d. h.*

$$f\in H_2^+(a) \Leftrightarrow h = \hat{C}f+F^2\hat{C}f\in\alpha(-a, a). \tag{17}$$

Wir geben noch einen zweiten Beweis von Satz 7. Die Bedingung ist *notwendig:* Wegen der Identität

$$f = C\hat{C}f+C\check{C}f$$

und wegen $C\check{C}f\in H_2^+(a)$ ist mit $f\in H_2^+(a)$ der Abschnitt $C\hat{C}f$ eines geraden Tiefpaßes (vgl. § 5) gleichzeitig rechter Hochpaßabschnitt. Es ist also einerseits mit

$h = \hat{C}f + F^2 \hat{C}f$, $Fh = C\hat{C}f + F^2 C\hat{C}f$, andererseits mit einem auf $(-a, a)$ verschwindenden quadratisch integrierbaren g, $Fg = C\hat{C}f$ auf $(0, \infty)$, woraus durch Differenzbildung $F(h-g) = 0$ auf $(0, \infty)$ folgt, was nach dem Satz von Paley und Wiener bedeutet, daß $h - g \in \alpha$. Da $h - g = h$ auf $(-a, a)$ und $= -g$ außerhalb $(-a, a)$, folgt

$$h \in \alpha(-a, a) \tag{17}$$

und ferner, daß die Funktion $-g$ die Fortsetzung von h als α-Funktion über $(-a, a)$ hinaus ist.

Die Bedingung (17) ist auch *hinreichend:* Mit dieser (komplexwertigen) Fortsetzung $-g$ ist dann die Funktion $C\hat{C}f$ als reeller rechter Hochpaßabschnitt nach (5) darstellbar als

$$C\hat{C}f = Ag + B\bar{g} = C\frac{1}{2}(g + \bar{g}) + S\frac{i}{2}(g - \bar{g}) = C\check{p} + S\check{q}$$

und somit tatsächlich

$$f = C\hat{C}f + C\check{C}f = C(\check{p} + \check{C}f) + S\check{q} \in H_2^+(a).$$

§ 7. Ein Test für Hochpaßabschnitte. Es geht jetzt lediglich noch um die Frage, wie man erkennen kann, ob die gerade reellwertige Funktion $h = \hat{C}f + F^2 \hat{C}f$ aus $L_2(-a, a)$, gebildet mit der vorgegebenen reellwertigen Funktion $f \in L_2(0, \infty)$, auf $(-a, a)$ mit den Werten einer α-Funktion übereinstimmt. Durch konforme Abbildung der längs $(-\infty, -a)$ und (a, ∞) aufgeschlitzten z-Ebene Σ durch

$$w = \frac{a}{z} - 1$$

auf die längs $(-2, 0)$ aufgeschlitzte w-Ebene Ω geht die obere (untere) Halbebene von Σ in die untere (obere) Halbebene von Ω über. Da h auf $(-a, a)$ *reell* ist, gilt hier mit einem $p \in L_2(0, \infty)$

$$h = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt\, e^{ixt} p = \bar{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt\, e^{-ixt} \bar{p},$$

d. h. h stimmt auf $(-a, a)$ mit den Randfunktionen zweier analytischer Funktionen der Hardy-Klasse in der oberen und in der unteren Halbebene überein, die nach einem Hilfssatz über analytische Fortsetzung (vgl. [4] S. 18.) dann über $(-a, a)$ ineinander fortsetzbar sind zu einer *analytischen Funktion $h(z)$ der Hardy-Klasse in Σ.* Nun gilt

Satz 8. *Mit einer analytischen Funktion $h(z)$ der Hardy-Klasse in Σ ist*

$$H(z) = \frac{1}{z+1} h\left(\frac{a}{z+1}\right) \tag{18}$$

eine analytische Funktion der Hardy-Klasse in Ω.

Beweis. Bezeichnet h_1 die Randfunktion der Restriktion von $h(z)$ auf die obere Halbebene, zum Unterschied der Randfunktion h_2 der Restriktion von $h(z)$ auf die untere Halbebene, wobei $h_1 = h_2 = h$ auf $(-a, a)$, und sind die Randfunktionen von $H(z)$ entsprechend bezeichnet

$$H_2(x) = \frac{1}{x+1} h_1\left(\frac{a}{x+1}\right), \quad H_1(x) = \frac{1}{x+1} h_2\left(\frac{a}{x+1}\right),$$

$$H_2 = H_1 \quad \text{auf} \quad (-\infty, -2), \quad (0, \infty),$$

so ist zunächst klar, daß diese auch in L_2 liegen:

$$\|H_2\| = a^{-\frac{1}{2}} \|h_1\|, \quad \|H_1\| = a^{-\frac{1}{2}} \|h_2\|.$$

Des weiteren gelten

$$h_1 \in \alpha \Leftrightarrow H_2 \in \beta, \quad h_2 \in \beta \Leftrightarrow H_1 \in \alpha.$$

Etwa liegen die Funktionen

$$\frac{1}{x} h_1\left(\frac{1}{x}\right), \quad \frac{a}{x} h_1\left(\frac{a}{x}\right), \quad \frac{1}{x} h_1\left(\frac{a}{x}\right), \quad H_2(x) = \frac{1}{x+1} h_1\left(\frac{a}{x+1}\right)$$

gemeinsam in β, so daß beispielsweise die erste Aussage aus der Beziehung

$$h_1(x) \in \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{x} h_1\left(\frac{1}{x}\right) \in \beta$$

folgt (vgl. [3] S. 103). Ein direkter Nachweis derselben ergibt sich sofort unter Benutzung der Hilberttransformation (vgl. [6] S. 100—103)

$$\tilde{f} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f}{t-x} = \operatorname*{l.i.m.}_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{|t-x| > \varepsilon} dt \frac{f}{t-x} = -iF^{-1} \operatorname{sgn} u F f,$$

mit deren Hilfe sich die α- und β-Funktionen folgendermaßen charakterisieren lassen

$$f \in \alpha \Leftrightarrow \tilde{f} = if, \quad f \in \beta \Leftrightarrow \tilde{f} = -if.$$

Nun ergibt sich leicht, daß die nach (18) gebildete Funktion $H(z)$ eine analytische Funktion der Hardy-Klasse in Ω ist: Bezeichnet $H^*(z)$ für den Augenblick die Funktion aus der Hardy-Klasse in Ω mit den Randfunktionen H_1 und H_2, so ist die Differenz $H(z) - H^*(z)$ z. B. im Halbkreis $|z-2| \leqq 1$, $y \geqq 0$ analytisch und beschränkt und hat auf dem Randteil $1 \leqq x \leqq 3$ f. ü. verschwindende radiale Randwerte, verschwindet also nach dem Satz von F. und M. Riesz identisch, so daß auch in ganz Ω $H(z) = H^*(z)$, w. z. b. w.

Bis dahin haben wir noch nicht berücksichtigt, daß die Funktion $h \in L_2(-a, a)$, die man ausgehend von der auf Zugehörigkeit zu $H_2^+(a)$ zu testenden Funktion $f \in L_2(0, \infty)$ auf $(-a, a)$ bildet

$$h = \hat{C}f + F^2 \hat{C}f, \tag{17}$$

nach Konstruktion eine *gerade* Funktion ist. Sie stimmt auf $(-a, a)$ mit den Werten einer analytischen Funktion der Hardy-Klasse in Σ dann und nur dann überein, wenn $f \in H_2^+(a)$, d. h. $f = C\check{p} + S\check{q}$. Aufgrund der im § 6 schon benutzen Identitäten $AS = \frac{i}{2} E + \frac{1}{2} CS$ und $BS = -\frac{i}{2} E + \frac{1}{2} CS$ ergeben sich die Randfunktionen von $h(z)$ aus den Abschnitten[1])

$$h_1^+ = A2S\check{q} = Cf - p + i\check{q}, \quad h_2^+ = B2S\check{q} = Cf - \check{p} - i\check{q}$$

zu

$$h_1 = h_1^+ + F^2 h_2^+, \quad h_2 = h_2^+ + F^2 h_1^+.$$

Man erkennt, daß die Differenz

$$\psi = h_1 - h_2 = 2i\check{q} - F^2 2i\check{q} \tag{19}$$

der Randfunktionen von $h(z)$ auf den Ufern der Schlitze $|x| > a$ von Σ eine *ungerade* Funktion ist, was damit gleichbedeutend ist, daß die Differenz

$$\Psi = H_1 - H_2 \tag{20}$$

der Randfunktionen der Hardyklaßfunktion $H(z)$ in Ω auf den Ufern des Schlitzes $(-2, 0)$ der Funktionalgleichung $\Psi(x) = \Psi(-x-2)$ genügt. Es gilt jetzt

Satz 9. *Eine Funktion* $H(x) \in L_2(0, \infty)$ *stimmt dann und nur dann auf* $(0, \infty)$ *mit den Werten einer Hardyklaßfunktion* $H(z)$ *im Schlitzgebiet* S: $|\arg z| < \pi$ *überein, wenn die Stieltjes'sche Integralgleichung*

$$H(x) = A^2 D = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty dt \, \frac{D}{t + x}$$

in $L_2(0, \infty)$ *lösbar ist. Die Lösung* D *stimmt mit der Differenz*

$$D(x) = H_1(-x) - H_2(-x)$$

der Randfunktionen der zugehörigen Hardyklaßfunktion $H(z)$ *auf den Ufern des Schlitzes* $(-\infty, 0)$ *von* S *überein* (vgl. [3] S. 99—102).

---

[1]) Beachte, daß auf $(0, a)$ $\hat{A}2S\check{q} = \hat{C}f$ und daher die α-Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dt\, e^{ixt} 2S\check{q}$ mit h_1 zusammenfällt.

Unter Verwendung von Satz 9 ergibt sich abschließend

Satz 10. *Die reellwertige Funktion $f \in L_2(0, \infty)$ ist dann und nur dann rechter Abschnitt einer Hochpaßfunktion, d. h. von der Form (7) $f = C\check{p} + S\check{q}$, wenn die mit (17) $h = \hat{C}f + F^2\hat{C}f \in L_2(-a, a)$ auf $(0, \infty)$ gebildete quadratisch integrierbare und reellwertige Funktion*

$$H(x) = \frac{1}{x+1} h\left(\frac{a}{x+1}\right) \tag{21}$$

hier mit den Werten einer Hardyklaßfunktion in $S = \Omega$ übereinstimmt und die nach (20) gebildete Differenz Ψ auf $(-2, 0)$ die Funktionalgleichung $\Psi(x) = \Psi(-x-2)$ erfüllt. Das bedeutet, daß die Stieltjes'sche Integralgleichung

$$H(x) = \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\Psi(-t)}{t+x} dt \tag{22}$$

eine Lösung $\Psi(-x) \in L_2(0, \infty)$ besitzt, welche die Bedingungen

$$\Psi(-x) = \Psi(x-2) \quad \textit{für} \quad 0 < x < 2, \qquad \Psi(-x) = 0 \quad \textit{für} \quad 2 < x < \infty \tag{23}$$

erfüllt. Aus den Werten von $\Psi(-x)$ auf $(0, 1)$ ergibt sich $\Psi = 2i\check{q} \in L_2(a, \infty)$ als

$$2i\check{q} = -\frac{a}{x} \Psi\left(\frac{a}{x} - 1\right). \tag{24}$$

Mit $\check{q}$ ist die gewünschte Darstellung von f als rechter Hochpaßabschnitt und damit die Hochpaßfunktion in ganzer Erstreckung gefunden.

Literatur

[1] B. F. Logan Jr., *Properties of high-pass signals,* Thesis, Dpt. of Electrical Engineering, Columbia University, 1965 (unpublished).

[2] A. Steiner, Randwertabschnitte einer Klasse analytischer Funktionen. I, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* Ser. A. I., **356** (1965).

[3] A. Steiner, Die einseitig unendliche Fouriertransformation und zwei Klassen quasianalytischer Funktionen. *Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna,* Springer-Verlag (Berlin/Heidelberg/New York, 1966), 89—104.

[4] A. Steiner, Zum Mechanismus der Quasianalytizität gewisser Randfunktionen auf endlichen Intervallen, *Ann. Acad. Sci. Fenn.,* Ser A. I., **459** (1970).

[5] A. Steiner, Ein Beweis des Satzes von Paley und Wiener, *Math. Z.,* **114** (1970), 213—216.

[6] H. Widom, *Lectures on integral equations,* Van Nostrand Mathematical Studies 17, Van Nostrand—Reinhold Company (New York/Toronto/London/Melbourne, 1969).

(Eingegangen am 3. April 1973)